

**Concursul interjudețean de matematică
CONSTANTIN TĂNĂSESCU**

Ediția a III-a, Mai 2021

*matematica în orice timpuri ... matematica în loc de orice ...
matematica oriunde*

Clasa a IX-a

Problema 1.

Fie $a, b \in \mathbb{N}^*$ și $x, y \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $a \sin x + b \cos y$ și $a \cos x + b \sin y$ sunt numere raționale strict pozitive. Arătați că există $k_1, k_2 \in \mathbb{N}^*$ pentru care cel puțin unul dintre numerele $k_1 \sin x + k_2 \cos x$ și $k_1 \sin y + k_2 \cos y$ este număr natural nenul.

Problema 2.

Fie ABC un triunghi ascuțitunghic, $M \in (AB)$ și $N \in (AC)$, P mijlocul lui $[MN]$, Q mijlocul laturii BC și $D \in (BC)$ piciorul bisectoarei din A . Dacă $AD = 2PQ$, arătați că:

$$\frac{1}{\max\{BM, CN\}} \leq \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} \leq \frac{1}{\min\{BM, CN\}}.$$

Problema 3.

Spunem despre un șir $(a_n)_{n \geq 0}$ că este **aritmetic** dacă acesta este constant, este periodic de perioada 2 sau este periodic de perioada $p \geq 3$ și $(a_n)_{0 \leq n \leq p-1}$ este o progresie aritmetică. De exemplu, șirurile $(1, 1, 1, 1, \dots)$, $(1, 3, 1, 3, \dots)$ și $(1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots)$ sunt **aritmice**.

Determinați șirurile crescătoare de numere naturale $(a_n)_{n \geq 0}$ care verifică: pentru orice $m \geq 2$, șirul resturilor împărțirilor numerelor $a_0, a_1, a_2, \dots$ la m este **aritmetic**.

Timp de lucru 3 ore (INCLUSIV CU URCAREA SOLUȚIILOR PE PLATFORMĂ !!!)

Acest concurs se desfășoară pentru că profesorii au ÎNCREDERE în elevii lor. Nu ne dezamăgiți !

Vă mulțumim, SUCCES!