

**Concursul interjudețean de matematică
CONSTANTIN TĂNĂSESCU**

Ediția a III-a, 22 Mai 2021

*matematica în orice timpuri ... matematica în loc de orice ...
matematica oriunde*

Clasa a XI-a

Problema 1. Fie $M \subset M_2(\mathbb{Z})$ o mulțime finită de matrici, toate având urma impară. Știind că pentru orice $A, B \in M$ avem $AB \in M$ și $\text{tr}(A^2B^2) = \text{tr}((AB)^2)$, arătați că:

- (a) pentru orice matrice $A \in M$ avem $\det(A) = 0$ și $|\text{tr}(A)| = 1$;
- (b) suma matricilor din M este o matrice singulară.

Problema 2. Arătați că pentru orice număr real $a \in [0, 1]$ există șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ cu $a_n \in \{0, 1\}$, $\forall n \geq 1$, pentru care

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = a.$$

Problema 3. Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care au proprietatea că pentru orice $x < y$, există $t \in (x, y)$ astfel încât

$$g(t) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

- (a) Dacă $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 1$, arătați că $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.
- (b) Dacă g este crescătoare și $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, arătați că $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 1$.
- (c) În condițiile punctului (b), este necesară condiția ca g să fie crescătoare?

Timp de lucru 3 ore (INCLUSIV CU URCAREA SOLUȚIILOR PE PLATFORMĂ !!!)

Acest concurs se desfășoară pentru că profesorii au ÎNCREDERE în elevii lor. Nu ne dezamăgiți !

Vă mulțumim, SUCCES!